Die Schwache Topologie der Wahrscheinlichkeitsmaße

Stilianos Louca

20. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt sich um eine möglichst geschlossene Zusammenfassung, zur schwachen Topologie der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem metrischen Raum. Grundkenntnisse in Topologie und Wahrscheinlichkeitstheorie sind vorausgesetzt. Ich habe versucht hier die wichtigsten Sätze ausführlich zu beweisen. Für nicht-bewiesene, verwendete Theoreme vor allem aus der Topologie, verweise ich auf entsprechende Literatur.

Die Hauptquelle der unten präsentierten Theoreme ist Parthasarathy[4]. Eine Übersicht zur Topologie und Moore-Smith Folgen bieten Dunford & Schwartz[3].

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal diesen Artikel verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst, da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt, das vom Teilen mehr wird!
Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Die schwache Topologie auf $\mathscr{M}$

2.0.1 Definition: $\mathcal{C}_b$, $\mathcal{U}_b$

Es sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Es bezeichne:

- $\mathcal{C}_b(T)$ den Raum aller reellen, beschränkten, stetigen Funktionen auf T.
- $\mathcal{U}_b(T)$ den Raum aller reellen, gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen auf T, insofern T metrisch ist.

Beide Funktionenräume seien ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

2.0.2 Definition: $\mathscr{M}$

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $\mathscr{M}(T)$ bezeichne die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße[1] auf der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(T)$ von T.

2.0.3 Definition: Schwache Topologie auf $\mathscr{M}$

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Definieren zu Funktionen $f_1, .., f_n \in \mathcal{C}_b(T)$ auf $\mathscr{M}(T)$ die Pseudonormen

$$\|\mu\|_{f_1,..,f_n} := \max_{1\le i\le n} \left| \int f_i \; d\mu \right| \quad , \quad \mu \in \mathscr{M}(T)$$

Die daraus resultierenden Kugeln

$$B^o_{f_1,..,f_n;\varepsilon}(\mu) := \left\{ \nu \in \mathscr{M}(T) : \|\mu - \nu\|_{f_1,..,f_n} < \varepsilon \right\} \quad , \quad f_1, .., f_n \in \mathcal{C}_b(T), \ \varepsilon > 0, \ \mu \in \mathscr{M}(T)$$

[1] Nicht-negative, σ-additive, reelle Mengenfunktionen μ mit $\mu(T) = 1$.

bilden in ihrer Gesamtheit eine Basis[2] der so genannten *schwachen Topologie* auf $\mathscr{M}$.

Man sagt: Eine Moore-Smith Folge $(\mu_\alpha) \subseteq \mathscr{M}$ *konvergiert schwach* gegen $\mu \in \mathscr{M}$, falls sie in der schwachen Topologie konvergiert. Dabei gilt:

$$\mu_\alpha \xrightarrow[\text{weak}]{\alpha} \mu \quad \Leftrightarrow \quad \int f \; d\mu_\alpha \xrightarrow{\alpha} \int f \; d\mu \quad \forall \; f \in \mathcal{C}_b(T)$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\mu_\alpha - \mu\|_{f_1,..,f_n} \xrightarrow{\alpha} 0 \quad \forall \; f_1, .., f_n \in \mathcal{C}_b(T)$$

Im folgenden sei $\mathscr{M}(T)$ stets mit der schwachen Topologie ausgestattet.

2.0.4 Lemma: $\mathscr{M}$ als Hausdorff-Raum

Ist $(T, \mathscr{O})$ perfekt-normal, so ist $\mathscr{M}$ Hausdorff. Insbesondere sind auch schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt.

Beweis: Es seien $\mu \neq \nu \in \mathscr{M}(T)$. Dann existiert nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße eine abgeschlossene $A \subseteq T$ so dass (o.B.d.A.)

$$\mu(A) < \nu(A) \tag{2.1}$$

Da T perfekt-normal ist, gilt nach 4.5.4:

$$\mu(A) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{C}_b \\ 1_A \leq f}} \int f \; d\mu \quad , \quad \nu(A) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{C}_b \\ 1_A \leq f}} \int f \; d\nu \tag{2.2}$$

so dass sich ein $1_A \leq f \in \mathcal{C}_b(T)$ finden lässt mit

$$\int f \; d\mu \overset{(2.1)}{<} \nu(A) \overset{(2.2)}{\leq} \int f \; d\nu$$

sprich es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$\|\mu - \nu\|_f \geq 4\varepsilon$$

bzw.

$$B^o_{f;\varepsilon}(\mu) \cap B^o_{f;\varepsilon}(\nu) = \emptyset$$

□

Bemerkung: Aus obigem Beweis wird ersichtlich, dass allgemein $\mathscr{M}(T)$ Hausdorff ist, genau dann wenn es zu $\mu \neq \nu$ ein $f \in \mathcal{C}_b(T)$ gibt, mit $\int f \; d\mu \neq \int f \; d\nu$.

---

[2] Tatsächlich bilden diese eine Basis: Zu

$$\lambda \in B^o_{f_1,..,f_n;\varepsilon}(\mu) \cap B^o_{g_1,..,g_m;\delta}(\nu) =: B$$

gilt

$$\nu \in B^o_{f_1,..,f_n,g_1,..,g_m;\rho}(\nu) \subseteq B$$

wobei

$$\rho := \min \left\{ \varepsilon - \|\mu - \lambda\|_{f_1,..,f_n}, \delta - \|\nu - \lambda\|_{g_1,..,g_m} \right\} /2$$

Nach [3] zeigt dies genau die Behauptung.

2.0.5 Charakterisierung der schwachen Konvergenz

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für eine Moore-Smith Folge $(\mu_\alpha) \subseteq \mathscr{M}(M)$ und $\mu \in \mathscr{M}(M)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mu_\alpha \xrightarrow[\text{weak}]{\alpha} \mu$
2. $\int f \, d\mu_\alpha \xrightarrow{\alpha} \int f \, d\mu \quad \forall \, f \in \mathcal{U}_b(M)$
3. $\mu(F) \geq \limsup_\alpha \mu_\alpha(F)$ für jede abgeschlossene $F \subseteq M$.
4. $\mu(G) \leq \liminf_\alpha \mu_\alpha(G)$ für jede offene $G \subseteq M$.
5. $\mu(A) = \lim_\alpha \mu_\alpha(A)$ für jede $A \in \mathscr{B}(M)$ mit $\mu(\partial A) = 0$.

Beweis: Die Äquivalenz von 1, 3, 4 und 5 ist in [4] gezeigt. Es soll hier als Beispiel nur die Äquivalenz zu 2 gezeigt werden.

Richtung 1⇒2 ist trivial, da $\mathcal{U}_b(M) \subseteq \mathcal{C}_b(M)$.
Richtung 2⇒3: Nach 4.5.5 gilt

$$\mu(F) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{U}_b \\ 1_F \leq f}} \int f \, d\mu$$

Man kann daher für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $1_F \leq f \in \mathcal{U}_b$ auswählen, so dass

$$\int f \, d\mu \leq \mu(F) + \varepsilon \tag{2.3}$$

Insbesondere gilt dann

$$\limsup_\alpha \mu_\alpha(F) \overset{1_F \leq f}{\leq} \limsup_\alpha \int f \, d\mu_\alpha = \int f \, d\mu \overset{(2.3)}{\leq} \mu(F) + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\limsup_\alpha \mu_\alpha(F) \leq \mu(F)$$

□

3 Zusammenhang zwischen $\mathscr{M}$ und M

3.1 Der Raum $\mathscr{D}$ der Punktmaße

3.1.1 Definition: $\mathscr{D}$

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, ausgestattet mit der σ-Algebra der Borelmengen. Es bezeichne $\mathscr{D}(T)$ die Menge aller Dirac-Maße auf T, ausgestattet mit der schwachen Topologie.

3.1.2 Lemma: Homeomorphie von $\mathscr{D}$ und Raum

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein vollständig regulärer, Kolmogorov Raum. Dann ist $\mathscr{D}(T)$ homeomorph zu T.[4]

Beweis: Offensichtlich ist die Zuordnung $x \mapsto \delta_x,\ x \in T$ bijektiv. Gehen $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x$, so gehen für jede $f \in \mathcal{C}_b(T)$

$$\int f \ d\delta_{x_\alpha} = f(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f(x)$$

sprich $\delta_{x_\alpha} \xrightarrow[\text{weak}]{\alpha} \delta_x$. Gehen anderseits $\delta_{x_\alpha} \xrightarrow[\text{weak}]{\alpha} \delta_x$, so existiert für jede offene Umgebung $U \in \mathscr{O}$ von x, ein $f \in \mathcal{C}_b$ mit $f(x) = 1,\ f\big|_{U^c} = 0$. Da $\int f \ d\delta_{x_\alpha} \xrightarrow{\alpha} \int f \ d\delta_x$, existiert ein α so dass

$$|f(x_\beta) - \underbrace{f(x)}_{1}| = \left| \int f \ d\delta_{x_\beta} - \int f \ d\delta_x \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall \ \beta \geq \alpha$$

sprich $f(x_\beta) \neq 0$ und daher $x_\beta \in U \quad \forall \ \beta \geq \alpha$. Insbesondere konvergieren $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x$.
□

3.1.3 Lemma: Folgenabgeschlossenheit von $\mathscr{D}$

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathscr{D}(M) \subseteq \mathscr{M}(M)$ schwach folgenabgeschlossen.[4]

Beweis: Es seien $\delta_{x_n} \in \mathscr{D}$ so dass $\delta_{x_n} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{weak}}{\longrightarrow}} \mu \in \mathscr{M}$.
Behauptung: (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$.

> **Beweis:** Unter Annahme des Gegenteils, ist $S := \{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine unendliche, abgeschlossene Teilmenge von M. Auch ist jede Teilmenge $C \subseteq S$ abgeschlossen. Ist C unendlich, so gilt
>
> $$\mu(C) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \ \delta_{x_n}(C) \overset{|C|=\infty}{=} 1$$
>
> Doch S enthält mehrere, disjunkte, unendliche Teilmengen, was ein Widerspruch zu $\mu(M) = 1$ ist.

Gehen $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in M$, so gehen nach 3.1.2 auch $\delta_{x_{n_k}} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{weak}}{\longrightarrow}} \delta_x$, das heißt $\mu = \delta_x \in \mathscr{D}$.
□

3.2 Separable Metrisierbarkeit von $\mathscr{M}$

3.2.1 Lemma: Separable Metrisierbarkeit von Dualräumen

Sei E ein separabler, normierter Raum, dazu der Dualraum E' zusätzlich ausgestattet mit der schwachen* Topologie. Sei $U' \subseteq E'$ eine beschränkte Teilmenge von E'. Dann kann die schwache* Topologie auf U' separabel metrisiert werden.

Beweis: Sei $\|a\| \leq M \quad \forall \ a \in U'$. Sei $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq E$ dicht in E. Dann ist die Abbildung $\Phi : U' \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ($\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ausgestattet mit der Produkttopologie), definiert durch

$$\Phi a := (a x_i)_{i=1}^\infty \quad , \quad a \in U'$$

ein Homeomorphismus in sein Bild. Tatsächlich:

- Ist $\Phi a = \Phi b$, so stimmen a, b auf der in E dichten Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ überein. Da beide stetig sind, tun sie dies auf ganz E. Daher ist Φ injektiv.

- Sei $(a_\alpha)_\alpha \subseteq U'$ eine Moore-Smith Folge für die $\Phi a_\alpha \xrightarrow{\alpha} \Phi a$. Bekanntlich[3] ist dies äquivalent zu $a_\alpha(x_i) \xrightarrow{\alpha} a(x_i) \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. Ist nun $x \in E$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_i\| \leq \varepsilon / M$. Insbesondere

$$\limsup_\alpha \|a_\alpha x - ax\| \leq \limsup_\alpha \underbrace{\|a_\alpha x - a_\alpha x_i\|}_{\leq \|a_\alpha\| \|x - x_i\| \leq \varepsilon} + \underbrace{\limsup_\alpha \|a_\alpha x_i - a x_i\|}_{0} + \underbrace{\|a x_i - ax\|}_{\leq \|a\| \|x_i - x\| \leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

  Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss

$$\lim_\alpha \|a_\alpha x - ax\| = 0$$

  sprich $a_\alpha \xrightarrow[\text{weak*}]{\alpha} a$ und Φ^{-1} ist stetig.

- Gehen anderseits $a_n \xrightarrow[\text{weak*}]{\alpha} a$, so ist klar dass $a_\alpha x_i \xrightarrow{\alpha} a x_i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$ und daher $\Phi a_\alpha \xrightarrow{\alpha} \Phi a$, das heißt Φ ist stetig.

Als Produkt abzählbar vieler, separabler, metrischen Räume, ist $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ und damit auch jede Untermenge, ein separabler metrischer Raum (siehe 4.2.3). Insbesondere ist $\Phi : U' \to f(U') \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ein Homeomorphismus in einen separablen metrischen Raum. Daher ist U' separabel, metrisierbar.
$\square$

3.2.2 Lemma: Separabilität von $\mathcal{U}_b$ für präkompakte Räume

Sei (M, d) ein präkompakter, metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{U}_b(M)$ separabel.[4]

Beweis: Nach Korollar 4.3.2 kann M zu einem kompakten, metrischen Raum $\overline{M}$ fortgesetzt werden, in dem er dicht ist. Nach 4.4.3 kann dann jede $f \in \mathcal{U}_b(M)$ eindeutig, normerhaltend zu einer $\overline{f} \in \mathcal{C}_b(\overline{M})$ fortgesetzt werden. Diese Zuordnung ist als lineare, normerhaltende Abbildung ein Homeomorhismus von $\mathcal{U}_b(M)$ in $\mathcal{C}_b(\overline{M})$. Da $\mathcal{C}_b(\overline{M})$ aufgrund der Kompaktheit von $\overline{M}$ nach 4.4.2 separabel ist, ist auch $\mathcal{U}_b(M)$ separabel.
$\square$

3.2.3 Theorem: Separable Metrisierbarkeit von $\mathscr{M}$

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist M separabel genau dann wenn, $\mathscr{M}(M)$ bzgl. der schwachen Topologie separabel, metrisierbar ist.

Beweis:

Richtung "$\Rightarrow$': Nach Urysohn[5] kann jeder separable, metrische Raum, mit einer äquivalenten Metrik d^* zu einem präkompakten Raum gemacht werden. Der Raum der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen $\mathcal{U}_b(M)$ (bzgl. d^*) ist nach 3.2.2 separabel. Bekanntlich kann $\mathscr{M}$ als (beschränkte) Teilmenge des Dualraums $\mathcal{U}_b'$ betrachtet werden[4], in der die schwache* Konvergenz genau der schwachen Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsmaße entspricht[5]. Nach 3.2.1 ist $\mathscr{M}$ bzgl. der schwachen* Topologie separabel, metrisierbar.

[3] Bemerke dass die Produkt-Topologie durch die Cartesisichen Produkte $\bigtimes_{i=1}^{\infty} G_i$ erzeugt wird, wobei die $G_i \subseteq \mathbb{R}$ offen und bis auf endlich viele 'i' gleich $\mathbb{R}$ sind.

[4] Durch die Zuordnung $f \mapsto \int f \, d\mu =: \mu(f)$ induziert $\mu \in \mathscr{M}$ ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{U}_b$. Ist $\mu(f) = \nu(f) \ \forall\, f \in \mathcal{U}_b$, so gilt nach 4.5.5 und dem Eindeutigkeitssatz für Maße, dass $\mu = \nu$ sind, sprich die Zuordnung $\mathscr{M} \to \mathcal{U}_b'$ ist injektiv.

[5] Beachte: $\mu_n \xrightarrow[\text{weak}]{n\to\infty} \mu$ genau dann wenn $\int f \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu \ \ \forall\, f \in \mathcal{U}_b(M)$.

Richtung "$\Leftarrow$": Ist $\mathscr{M}$ bzgl. der schwachen Topologie separabel metrisierbar, so ist es auch die Untermenge $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{M}$ der Dirac-Maße. Nach 3.1.2 ist $\mathscr{D}$ homeomorph zu M, so dass auch M separabel ist.
□

3.3 Kompaktheit von $\mathscr{M}$

3.3.1 Lemma: Folgenkompaktheit von Dualräumen

Sei E ein separabler, normierter Raum, $U \subseteq E$ beliebige Untermenge, $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Definiere

$$\mathfrak{M} := \left\{ a \in E' : \|a\| = 1,\ a\big|_U : U \to A \right\}$$

und nehme an, $\exists\ z \in E$ so dass $|az| = \|z\| \quad \forall\ a \in \mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ schwach* folgenkompakt.

Beweis: Der Beweis erfolgt in 3 Teilen.
Behauptung: Jede Folge $(a_n) \subseteq \mathfrak{M}$ besitzt eine schwach* konvergente Teilfolge mit Grenzwert $a \in E'$.

> **Beweis:** Sei $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq E$ dicht in E. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Zahlenfolge $(a_n x_i)_{n=1}^\infty$ beschränkt, besitzt daher eine konvergente Teilfolge.
>
> Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalisierungsverfahrens lässt sich nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ wählen, so dass alle $(a_{n_k} x_i)_{k=1}^\infty$, $i \in \mathbb{N}$ konvergieren. Ist nun $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $x_i \in B_\varepsilon(x)$ und es gilt
>
> $$\begin{aligned}\overline{\lim_{k,l\to\infty}}\ |a_{n_k}x - a_{n_l}x| \leq &\ \overline{\lim_{k,l\to\infty}}\ \underbrace{|a_{n_k}x - a_{n_k}x_i|}_{\leq \|a_{n_k}\| \|x - x_i\| \leq \varepsilon} \\ &+ \underbrace{\overline{\lim_{k,l\to\infty}}\ |a_{n_k}x_i - a_{n_l}x_i|}_{0} \\ &+ \overline{\lim_{k,l\to\infty}}\ \underbrace{|a_{n_l}x_i - a_{n_l}x|}_{\leq \|a_{n_l}\| \|x_i - x\| \leq \varepsilon} \\ \leq &2\varepsilon\end{aligned}$$
>
> Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt
>
> $$\lim_{k,l\to\infty} |a_{n_k}x - a_{n_l}x| = 0$$
>
> sprich $(a_{n_k}x)_{k=1}^\infty$ ist Cauchy und besitzt einen Grenzwert $a(x) := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}(x)$. Da die a_{n_k} gleichmäßig beschränkt sind, ist $a \in E'$ ein lineares, stetiges Funktional und
>
> $$a_{n_k} \underset{\text{weak*}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} a \quad .$$

Behauptung: $\|a\| = 1$.

> **Beweis:** Wegen
>
> $$|a(x)| \leq \sup_k \underbrace{\|a_{n_k}\|}_{1} \cdot \|x\| = \|x\|$$
>
> gilt $\|a\| \leq 1$. Wegen
>
> $$|a(z)| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{|a_{n_k}(z)|}_{\|z\|} = \|z\|$$
>
> gilt $\|a\| \geq 1$.

Behauptung: $a\big|_U : U \to A$.

Beweis: Für $x \in E$ gilt natürlich

$$ax = \lim_{k\to\infty} \underbrace{a_{n_k} x}_{\in A} \overset{\substack{A \\ \text{abg.}}}{\in} A$$

Nach letzten beiden Behauptungen ist $a \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ ist schwach* folgenkompakt.
□

3.3.2 Theorem: Kompaktheit von $\mathscr{M}$

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. M ist kompakt.
2. $\mathscr{M}(M)$ ist schwach folgenkompakt.
3. $\mathscr{M}(M)$ ist bzgl. der schwachen Topologie metrisierbar, kompakt.

Beweis:

2⇒1: Da $\mathscr{D}$ nach 3.1.3 (schwach) folgenabgeschlossen im (schwach) folgenkompakten $\mathscr{M}$ ist, ist sie selbst (schwach) folgenkompakt. Nach 3.1.2 ist M homeomorph zu $\mathscr{D}$, damit auch folgenkompakt.

1⇒3: Da M kompakt ist, kann $\mathscr{M}(M)$ mit der Menge $\mathfrak{M}$ aller nicht-negativen, auf 1 normierten, linearen Funktionale auf dem separablen Funktionenraum $\mathcal{C}_b(M)$ identifiziert werden[4]. Schwache Konvergenz in $\mathscr{M}$ entspricht schwacher* Konvergenz in $\mathfrak{M}$ und es gilt die Darstellung

$$\mathfrak{M} = \left\{a \in \mathcal{C}_b' : \|a\| = 1,\ a\big|_U \geq 0\right\}$$

wobei $U := \{f \in \mathcal{C}_b : 0 \leq f\}$. Ferner ist $1 \in \mathcal{C}_b$ und es gilt $a(1) = 1 \quad \forall\ a \in \mathfrak{M}$ [6]. Nach Lemma 3.3.1 ist $\mathfrak{M}$ schwach* bzw. $\mathscr{M}$ schwach folgenkompakt.

Doch da M separabel ist, ist $\mathscr{M}$ nach 3.2.3 metrisierbar und Folgenkompaktheit ist gleich Kompaktheit.

3⇒2: Trivial.

□

3.4 Vollständigkeit von $\mathscr{M}$

3.4.1 Definition: G_δ-Menge

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq T$ heißt G_δ, falls es offene $G_n \in \mathscr{O}$ gibt so dass

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

[6] Beachte dass jedes nicht-negative, lineare Funktional $a \in \mathcal{U}_b'$ beschränkt ist mit Norm $\|a\| = a(1)$.

Bemerke: O.B.d.A. kann angenommen werden: $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$.

3.4.2 Satz: Charakterisierung vollständig metrisierbarer Räume

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. T ist vollständig metrisierbar.
2. T ist metrisierbar und ist in jedem metrisierbaren Raum, in dem er eingebettet ist, eine G_δ-Menge.
3. T ist eingebettet in einem vollständig metrisierbaren Raum, in dem er eine G_δ-Menge ist[7].

Beweis:

1⇔2: Siehe [5], Kapitel 6, Problem K

1⇒3: Trivial, da T homeomorph zu einem vollständigen, metrischen Raum ist.

3⇒1: Siehe [6], Theorem 4.3.23

3.4.3 Theorem: Vollständige Metrisierbarkeit von $\mathscr{M}$

Es sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum.
Dann ist $\mathscr{M}(M)$ vollständig metrisierbar ⇔ M ist vollständig metrisierbar.[4]

Beweis: Grundstein des Beweises ist Satz 3.4.2.

Richtung "⇐": Nach Urysohn[5] kann man annehmen dass M präkompakt ist, ohne dabei seine Topologie zu beeinflussen. Ist $\overline{M}$ die Vervollständigung von M (vgl. 4.3.1), so ist $\overline{M}$ kompakt und $\mathscr{M}(\overline{M})$ nach 3.3.2 kompakt- bzw. vollständig metrisierbar.

M ist als vollständig metrisierbarer Raum, nach 3.4.2(2) eine G_δ-Menge in $\overline{M}$. Die Menge

$$\mathscr{M}_0 := \left\{\mu \in \mathscr{M}(\overline{M}) : \mu(\overline{M} \setminus M) = 0\right\} \subseteq \mathscr{M}(\overline{M})$$

ist offensichtlich homeomorph[8] zu $\mathscr{M}(M)$, so dass es reicht die vollständige Metrisierbarkeit von $\mathscr{M}_0$ zu zeigen. Nach 3.4.2(3) genügt es dafür zu zeigen, dass $\mathscr{M}_0$ eine G_δ-Menge in $\mathscr{M}(\overline{M})$ ist.

Behauptung: $\mathscr{M}_0$ ist G_δ in $\mathscr{M}(\overline{M})$.

> **Beweis:** Da M G_δ in $\overline{M}$ ist, existieren in $\overline{M}$ offene $G_n \searrow M$. Dabei gilt wegen $G_l^c \nearrow M^c$:
>
> $$\mathscr{M}_0 = \bigcap_{l=1}^{\infty} \left\{\mu \in \mathscr{M}(\overline{M}) : \mu(G_l^c) = 0\right\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left\{\mu \in \mathscr{M}(\overline{M}) : \mu(G_l^c) < \tfrac{1}{k}\right\}}_{\mathscr{M}_{l,k}}$$
>
> so dass es genügt zu zeigen, dass $\mathscr{M}_{l,k}$ offen bzw. $\mathscr{M}_{l,k}^c$ (folgen)abgeschlossen sind.

[7] Beachte: Dies bedeutet keinesfalls, dass jede G_δ-Menge in einem vollständigen, metrischen Raum vollständig ist!
[8] Einen Homeomorphismus stellt die Zuordnung $\mu \mapsto \mu|_M$ dar. Beachte dass $M \in \mathscr{B}(\overline{M})$ messbar ist.

Tatsächlich, sind $\mu_n, \mu \in \mathscr{M}(\overline{M})$ so dass

$$\mu_n \overset{n\to\infty}{\underset{\text{weak}}{\longrightarrow}} \mu \quad , \quad \overbrace{\mu_n(G_l^c) \geq \tfrac{1}{k}}^{\Leftrightarrow \ \mu_n \in \mathscr{M}_{l,k}^c}$$

so gilt auch

$$\mu(\overline{M} \setminus G_l) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \mu_n(\underbrace{G_l^c}_{\text{abg.}}) \geq \tfrac{1}{k}$$

sprich $\mu \in \mathscr{M}_{l,k}^c$ und $\mathscr{M}_{l,k}^c$ ist abgeschlossen.

Damit ist $\mathscr{M}_0$ bzw. $\mathscr{M}(M)$ vollständig metrisierbar.

Richtung "⇒": Es sei $\mathscr{M}(M)$ vollständig metrisierbar. Dann ist $\mathscr{D}(M) \subseteq \mathscr{M}(M)$ als abgeschlossene Teilmenge (vgl. 3.1.3) ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum. Da M nach 3.1.2 zu $\mathscr{D}(M)$ homeomorph ist, ist M vollständig metrisierbar.
□

3.5 Kompakte Mengen in $\mathscr{M}$

3.5.1 Definition: Straffheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Es sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\mu \in \mathscr{M}(T)$ *straff*, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ K \subseteq T \text{ kompakt } : \ \mu(K^c) \leq \varepsilon$$

Eine Familie $(\mu_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{M}(M)$ heißt *gleichmäßig straff*, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ K \subseteq T \text{ kompakt } : \ \sup_{i\in I} \mu_i(K^c) \leq \varepsilon$$

3.5.2 Lemma: Notwendige Bedingung zur Kompaktheit in $\mathscr{M}$

Sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum und $\Gamma \subseteq \mathscr{M}(M)$. Ist $\mathrm{cl}(\Gamma)$ kompakt, so existiert $\forall\ \varepsilon, \delta > 0$ eine endliche Vereinigung von δ-Kugeln $S_{\varepsilon,\delta}$ mit

$$\mu(S_{\varepsilon,\delta}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ \mu \in \Gamma$$

Beweis: Da M separabel ist, gibt es für jedes $\delta > 0$, offene δ-Kugeln $B_{\delta,i}^o,\ i \in \mathbb{N}$ so dass

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\delta,i}^o \tag{3.1}$$

Seien nun $\varepsilon, \delta > 0$ vorgegeben.
Behauptung: Es existiert ein $N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ so dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_{\varepsilon,\delta}} B_{\delta,i}^o\right) > 1 - \varepsilon \quad \forall\ \mu \in \Gamma$$

Beweis: Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es Zahlen $N_1 < N_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ und Folge $(\mu_k) \subseteq \Gamma$ so dass

$$\mu_k\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N_k} B^o_{\delta,i}}_{=:S^o_k}\Bigg) \leq 1-\varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Da $\mathrm{cl}(\Gamma)$ kompakt ist, kann man o.B.d.A. annehmen dass $\mu_k \xrightarrow[\text{weak}]{k\to\infty} \mu$ für irgendein $\mu \in \mathscr{M}(M)$. Doch

$$\mu_k(S^o_l) \overset{S^o_l \subseteq S^o_k}{\leq} \mu_k(S^o_k) \leq 1-\varepsilon \quad \forall\, k \geq l \tag{3.2}$$

impliziert

$$\mu(S^o_l) \leq \varliminf_{k\to\infty} \mu_k(S^o_l) \overset{(3.2)}{\leq} 1-\varepsilon \quad \forall\, l \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

Doch anderseits gehen per Konstruktion (3.1) $S^o_l \nearrow M$, also

$$\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu(S^o_l) \overset{(3.3)}{\leq} 1-\varepsilon$$

ein Widerspruch zu $\mu \in \mathscr{M}(M)$.

Setzt man nun

$$S_{\varepsilon,\delta} := \bigcup_{i=1}^{N_{\varepsilon,\delta}} B^o_{\delta,i}$$

so erfüllt $S_{\varepsilon,\delta}$ die gesuchten Eigenschaften.
$\square$

3.5.3 Theorem: Kompakte Mengen in $\mathscr{M}$ [Prokhorov]

Sei (M,d) ein separabler, metrischer Raum und $\Gamma \subseteq \mathscr{M}(M)$. Dann gilt:

1. Ist Γ gleichmäßig straff, so ist $\mathrm{cl}(\Gamma)$ kompakt.
2. Ist M vollständig und $\mathrm{cl}(\Gamma)$ kompakt, so ist Γ gleichmäßig straff.

Beweis:

1. Da M separabel ist, kann nach Urysohn[5] o.B.d.A. angenommen werden dass (M,d) präkompakt ist, ohne dabei seine Topologie zu beeinflussen. Nach 4.3.2 kann M zu einem kompakten, metrischen Raum $\overline{M}$ (seine Vervollständigung) erweitert werden. Zu $\mu \in \mathscr{M}(M)$ setze $\overline{\mu} \in \mathscr{M}(\overline{M})$ definiert durch[9]

$$\overline{\mu}(A) := \mu(A \cap M) \quad , \quad A \in \mathscr{B}(\overline{M})$$

Nach 3.2.3 ist $\mathscr{M}(M)$ metrisierbar, so dass nach 4.1.4(8) zur Kompaktheit von $\mathrm{cl}(\Gamma)$ genügt zu zeigen: Jede Folge $(\mu_n) \subseteq \Gamma$ besitzt eine in $\mathscr{M}(M)$ konvergente Teilfolge. Nach 3.3.2 impliziert die Kompaktheit von $\overline{M}$ die Kompaktheit von $\mathscr{M}(\overline{M})$, so dass die Folge $(\overline{\mu}_n) \subseteq \mathscr{M}(\overline{M})$ eine gegen $\mu \in \mathscr{M}(\overline{M})$ konvergente Teilfolge $(\overline{\mu}_{n_k})_k$ besitzt:

$$\overline{\mu}_{n_k} \xrightarrow[\text{weak}]{k\to\infty} \mu \ \in \mathscr{M}(\overline{M}) \tag{3.4}$$

Behauptung: Es existiert ein $\mu' \in \mathscr{M}(M)$ mit $\overline{\mu'} = \mu$.

[9] Beachte dass die Schnitt-σ-Algebra $\mathscr{B}(\overline{M}) \cap M$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(M)$ übereinstimmt.

Beweis: Zu $r \in \mathbb{N}$ wähle kompakte $K_r \subseteq M$, so dass $\nu(K_r) \geq 1 - 1/r \quad \forall\, \nu \in \Gamma$. Beachte dass K_r auch kompakt in $\overline{M}$ ist und

$$\overline{\nu}(K_r) = \nu(K_r) \quad \forall\, \nu \in \Gamma$$

Insbesondere

$$\overline{\mu}_{n_k}(K_r) \geq 1 - 1/r \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

so dass[10]

$$\mu^*(M) \overset{M \supseteq K_r}{\geq} \mu(K_r) \overset{(3.4)}{\geq} \varlimsup_{k\to\infty} \overline{\mu}_{n_k}(K_r) \geq 1 - 1/r \quad \forall\, r \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

Doch dies impliziert

$$1 \overset{(3.5)}{\leq} \mu^*(M) \overset{M \subseteq \overline{M}}{\leq} \mu(\overline{M}) = 1$$

sprich $\mu^*(M) = \mu(\overline{M})$. Nach 4.5.3 induziert μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu' \in \mathscr{M}(M)$ mit $\overline{\mu'} = \mu$.

Behauptung: $\mu_{n_k} \underset{\text{weak}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \mu'$.

Beweis: Ist $C \subseteq M$ abgeschlossen, sprich $C = \overline{C} \cap M$ für irgendeine abgeschlossene $\overline{C} \subseteq \overline{M}$, so gilt

$$\mu'(C) = \mu'(\overline{C} \cap M) \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{\overline{\mu'}}_{\mu}(\overline{C}) \geq \varlimsup_{k\to\infty} \overline{\mu}_{n_k}(\overline{C}) \overset{\text{def.}}{=} \varlimsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\overline{C} \cap M) = \varlimsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(C)$$

Somit besitzt (μ_n) eine in $\mathscr{M}(M)$ konvergente Teilfolge.

2. Zu $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ wähle $S_{\varepsilon,n}$ so, dass $S_{\varepsilon,n}$ endliche Vereinigung abgeschlossener $\frac{1}{n}$-Kugeln ist und

$$\mu(S_{\varepsilon,n}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \forall\, \mu \in \Gamma \tag{3.6}$$

(vgl. Lemma 3.5.2). Dann ist

$$K_\varepsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\varepsilon,n}$$

offensichtlich präkompakt & vollständig (da abgeschlossen in M), also kompakt, und erfüllt

$$\mu(K_\varepsilon) = 1 - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\varepsilon,n}^c\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_{\varepsilon,n}^c) \overset{(3.6)}{\geq} 1 - \ \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \Gamma$$

Demnach ist Γ gleichmäßig straff.

□

[10] Beachte dass K_r auch in $\overline{M}$ abgeschlossen ist.

4 Anhang

4.1 Elemente der Topologie

4.1.1 Definition: Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* $(T, \mathscr{O})$ ist eine nicht-leere Grundmenge T, ausgestattet mit einem System $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(T)$, der sogenannten *Topologie*, das erfüllt:

1. $\emptyset,\ T \in \mathscr{O}$
2. Für $O,\ G \in \mathscr{O}$ ist auch $O \cap G \in \mathscr{O}$
3. Für beliebig viele $O_i \in \mathscr{O},\ i \in I$ ist $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathscr{O}$

Die Mengen aus $\mathscr{O}$ heißen *offen*, deren Komplemente *abgeschlossen*. Mehr unter [5],[6].

4.1.2 Klassen topologischer Räume

Ein topologischer Raum $(T, \mathscr{O})$ heißt:

1. *Kolmogorov*, falls es für je zwei Punkte $x, y \in T$ eine offene Menge $U \in \mathscr{O}$ gibt, so dass $x \in U,\ y \notin U$ (oder umgekehrt).
2. *Hausdorff*, falls je zwei Punkte $x_1 \neq x_2 \in T$ durch offene Mengen trennbar sind, das heißt offene $G_1, G_2 \in \mathscr{O}$ existieren mit
$$x_1 \in G_1\ ,\ x_2 \in G_2\ ,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$$
3. *Regulär*, falls je eine abgeschlossene Menge $A \subseteq T$ und Punkt $x \neq A$ durch offene Mengen trennbar sind, das heißt offene $G_1, G_2 \in \mathscr{O}$ existieren mit
$$A \subseteq G_1\ ,\ x \in G_2\ ,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$$
4. *Vollständig regulär*, falls je eine abgeschlossene Menge $A \subseteq T$ und Punkt $x \neq A$ durch eine stetige, beschränkte Funktion trennbar sind, sprich $f \in \mathcal{C}_b(T)$ existiert, mit
$$0 \leq f \leq 1\ ,\ f\big|_A = 0\ ,\ f(x) = 1$$
5. *Normal*, falls je zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq T$ durch offene Mengen trennbar sind, das heißt offene $G_1, G_2 \in \mathscr{O}$ existieren mit
$$A_1 \subseteq G_1\ ,\ A_2 \subseteq G_2\ ,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$$
6. *Perfekt normal*, falls jede abgeschlossene Menge $A \subseteq T$ dargestellt werden kann durch $A = f^{-1}(\{0\})$ für irgendeine $f \in \mathcal{C}_b(M)$.
7. *Separabel*, falls eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq T$ existiert, so dass
$$\forall\ O \in \mathscr{O} : O \cap D \neq \emptyset$$
8. *Zweit-abzählbar*, falls $\mathscr{O}$ eine abzählbare Basis besitzt, sprich ein abzählbares System $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{O}$ so dass $\mathscr{O}$ aus allen Vereinigungen aus Mengen in $\mathcal{G}$ besteht.
9. *Erst-abzählbar*, falls zu jedem Punkt $x \in T$ eine abzählbare Umgebungsbasis existiert, sprich, ein abzählbares System $\mathcal{G}_x \subseteq \mathscr{O}$ so dass
$$\forall\ x \in O \in \mathscr{O}\ :\ \exists\ G \in \mathcal{G}_x : x \in G \subseteq O$$

4.1.3 Eigenschaften von Räumen

Seien $(T, \mathscr{O}), (\Lambda, \mathscr{G})$ topologische Räume. Es gilt:

1. Ist T Hausdorff, so ist $\{x\}$ abgeschlossen für jedes $x \in T$.

2. Ist T vollständig regulär, so ist T regulär.

3. T ist perfekt normal $\Leftrightarrow$ T ist normal und jede abgeschlossene $F \subseteq T$ ist eine G_δ-Menge.[1]

4. T ist normal $\Leftrightarrow$ Zu disjunkten, abgeschlossenen $A_1, A_2 \subseteq T$ existiert stets eine $f \in \mathcal{C}_b(T)$ so dass

$$0 \leq f \leq 1 \quad , \quad f\big|_{A_1} = 0 \quad , \quad f\big|_{A_2} = 1$$

5. T ist perfekt normal $\Leftrightarrow$ Zu disjunkten, abgeschlossenen $A, B \subseteq T$ existiert stets ein $f \in \mathcal{C}_b(T)$ mit

$$0 \leq f \leq 1 \quad , \quad A = f^{-1}(\{0\}) \quad , \quad B = f^{-1}(\{1\})$$

   [1]

6. Ist T zweit-abzählbar, so ist T separabel.

7. $F \subseteq T$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder Grenzwert x einer Moore-Smith Folge $(x_\alpha) \subseteq F$ liegt ebenfalls in F[3].

8. $f : T \to \Lambda$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Für jede Moore-Smith Folge $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x$ gehen auch $f(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f(x)$[3].

4.1.4 Satz: Eigenschaften metrischer Räume

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. M ist
   (i) Hausdorff
   (ii) perfekt normal
   (iii) vollständig regulär

2. M ist kompakt $\Leftrightarrow$ M ist präkompakt und vollständig.

3. M ist kompakt $\Leftrightarrow$ M ist folgenkompakt.

4. Ist M präkompakt, so ist er zweit-abzählbar.

5. M ist separabel $\Leftrightarrow$ M ist zweit-abzählbar.

6. Jede Untermenge $A \subseteq M$ wird mit der Einschränkung $d\big|_A$ zu einem metrischen Raum, dessen Topologie mit der Schnitttopologie übereinstimmt.

7. Ist M separabel, so ist auch jede Untermenge $A \subseteq M$ separabel.

8. Sei $\Gamma \subseteq M$. Dann ist $\mathrm{cl}(\Gamma)$ kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge $(x_n) \subseteq \Gamma$ besitzt eine (in M) konvergente Teilfolge.

Beweis:

1. (i) Sind $x \neq y \in M$ und $\varepsilon := d(x,y)$, so sind x, y durch die offenen Kugeln $B^o_{\varepsilon/4}(x)$, $B^o_{\varepsilon/4}(y)$ getrennt.
   (ii) Ist $A \subseteq M$ abgeschlossen, so gilt $A = f^{-1}(\{0\})$ wobei $f \in \mathcal{C}_b(M)$, $f(x) := d(A,x)$.
   (iii) Ist $A \subseteq M$ abgeschlossen, $x \notin A$ und $\varepsilon := d(A,x) > 0$, so trennt die Abbildung $f \in \mathcal{C}_b(M)$, definiert durch
$$f(y) := \min\{1, d(A,y)/\varepsilon\}$$

2. [7]

3. [3]

4. Da M präkompakt ist, kann er zu jedem $\varepsilon > 0$ durch endlich viele, offene Kugeln $B^o_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$, $i = 1, .., N_\varepsilon$ überdeckt werden. Das abzählbare System
$$\mathcal{G} := \{B^o_\varepsilon(x_i^\varepsilon) : i = 1, .., N_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$
bildet eine Basis der Topologie.

5. Richtung "$\Leftarrow$" ist gegeben durch 4.1.3.
Richtung "$\Rightarrow$": Ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dicht in M, so bildet das abzählbare System offener Kugeln
$$\mathcal{G} := \{B^o_\varepsilon(x_n) : n \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$
eine Basis der Topologie.

6. [3]

7. Da M separabel ist, ist er auch zweit-abzählbar. Damit ist auch A zweit-abzählbar bzw. separabel.

8. Richtung "$\Rightarrow$" ist klar.
Richtung "$\Leftarrow$": Es seien $(\overline{x}_n) \subseteq \mathrm{cl}(\Gamma)$, dazu $(x_n) \subseteq \Gamma$ so dass $d(x_n, \overline{x}_n) \leq \frac{1}{n}$. Dann besitzt (x_n) nach Voraussetzung eine gegen $x \in M$ Konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Doch dies impliziert
$$d(\overline{x}_{n_k}, x) \leq \underbrace{d(\overline{x}_{n_k}, x_{n_k})}_{\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$
sprich $\overline{x}_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Da $\mathrm{cl}(\Gamma)$ abgeschlossen ist, muss $x \in \mathrm{cl}(\Gamma)$ sein.

□

4.1.5 Definition: $d(A, \cdot)$

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann definiert man $d(A, \cdot) : M \to [0, \infty)$ gemäß
$$d(A,x) := \inf_{y \in A} d(x,y)$$
Für $A, B \subseteq M$ definiert man
$$d(A,B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y)$$

Bemerkung: $d(A, \cdot)$ ist gleichmäßig stetig auf M. Ist A abgeschlossen, so gilt $A = \{d(A, \cdot) = 0\}$ [4].

4.1.6 Lemma zur perfekten Normalität metrischer Räume

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq M$ abgeschlossen, disjunkt so dass $d(A, B) =: \delta > 0$. Dann existiert eine $f \in \mathcal{U}_b(M)$ mit

$$0 \leq f \leq 1 \quad , \quad A = f^{-1}(\{0\}) \quad , \quad B = f^{-1}(\{1\})$$

Beweis: Die Abbildungen $d(A, \cdot)$, $d(B, \cdot)$ sind gleichmäßig stetig und $d(A, \cdot) + d(B, \cdot) \geq \delta$. Somit ist

$$f := \frac{d(A, \cdot)}{d(A, \cdot) + d(B, \cdot)}$$

nach 4.6.1 ebenfalls gleichmäßig stetig und besitzt die gewünschten Eigenschaften.
□

4.1.7 Lemma über Hausdorf-Räume

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein Hausdorff-Raum und $K_1, K_2 \subseteq T$ kompakt. Dann existieren disjunkte, offene $O_i \supseteq K_i$.

Beweis: Der Beweis verläuft in zwei Schritten.
Behauptung: Zu jedem Punkt $y \in K_2$ existierten disjunkte, offene $O_1^y, O_2^y \in \mathscr{O}$ so dass $K_1 \subseteq O_1^y$, $y \in O_2^y$.

> **Beweis:** Zu $x \in K_1$ existieren disjunkte, offene G_1^x, G_2^x so dass $x \in G_1^x, y \in G_2^x$. Da die $(G_1^x)_{x \in K_1}$ eine offene Überdeckung von K_1 bilden, existieren endlich viele $x_1, .., x_n \in K_1$ mit
>
> $$K_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_1^{x_k} =: O_1^y$$
>
> Setzt man nun
>
> $$O_2^y := \bigcap_{k=1}^{n} G_2^{x_k}$$
>
> so besitzen O_1^y, O_2^y die gewünschten Eigenschaften.

Zu jedem Punkt $y \in K_2$ seien nun solche O_1^y, O_2^y auserwählt. Da die $(O_2^y)_{y \in K_2}$ eine offene Überdeckung von K_2 bilden, existieren endlich viele $y_1, .., y_n \in K_2$ so dass

$$K_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_2^{y_k} =: O_2$$

Setzt man nun

$$O_1 := \bigcap_{k=1}^{n} O_1^{y_k}$$

so besitzen O_1, O_2 alle gewünschten Eigenschaften.
□

4.1.8 Lemma über kompakte Hausdorff-Räume

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein kompakter Hausdorff Raum. Dann ist T normal und vollständig regulär.

Beweis: Je zwei abgeschlossene $F_1, F_2 \subseteq T$ sind auch kompakt, können also nach 4.1.7 durch offene Mengen separiert werden und T ist normal. Ist jetzt $x \notin F_1$, so ist $\{x\}$ abgeschlossen und x, F_1 können nach 4.1.3(4) durch eine beschränkte, stetige Funktion separiert werden.
□

4.2 Produkte von Räumen

4.2.1 Definition: Produktraum

Es sei $(T_i, \mathscr{O}_i),\ i \in I$ eine Familie topologischer Räume. Auf $T := \bigtimes_{i\in I} T_i$ ist die *Produkttopologie*, die kleinste Topologie bzgl. der alle Projektionen

$$\Pi_i : T \to T_i \quad , \quad \Pi_i(x) := x_i \quad , \quad x = (x_i)_{i\in I} \in T$$

messbar sind. Sie besitzt die Basis

$$\left\{ \bigtimes_{i\in I} O_i : O_i \in \mathscr{O}_i \ \wedge \ O_i = T_i \ \text{ außer für endlich viele } i \right\}$$

[3]

4.2.2 Lemma: Unendliche Produkte separabler Räume

Es seien $(T_n, \mathscr{O}_n),\ n \in \mathbb{N}$ topologische Räume, dazu $T := \bigtimes_{n=1}^{\infty} T_n$ ausgestattet mit der Produkt-Topologie.

1. Sind alle T_n separabel, so ist es auch T.
2. Sind alle T_n zweit-abzählbar, so ist es auch T.

Beweis:

1. Es seien $\Gamma_n \subseteq T_n$ jeweils abzählbare, in T_n dichte Teilmengen, davon jeweils ausgewählt ein festes $\gamma_n^0 \in \Gamma_n,\ n \in \mathbb{N}$. Definieren

$$\Gamma := \underbrace{\bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ (\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \bigtimes_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \ : \ \gamma_n = \gamma_n^0 \ \ \forall\, n \geq N \right\}}_{\text{abzählbar}}}_{\text{abzählbar}}$$

und behaupten, dass $\Gamma \subseteq T$ dicht ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jedes Produkt $U := \bigtimes_{n=1}^{\infty} U_n$ mit:

- $U_n \in \mathscr{O}_n$
- $U_n = T_n \ \ \forall\, n \geq N$ für geeignetes $N \in \mathbb{N}$

gilt $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ [11]. Doch tatsächlich, lassen sich nach Voraussetzung $\gamma_n \in \Gamma_n \cap U_n$ finden. Insbesondere

$$(\gamma_1, .., \gamma_{N-1}, \gamma_N^0, \gamma_{N+1}^0, \dots) \in U \cap \Gamma$$

was zu zeigen war.

[11] Beachte dass diese offenen Produkte eine Basis für die Produkt-Topologie bilden[3].

2. Es seien $\mathcal{G}_n \subseteq \mathscr{O}_n$ jeweils abzählbare Basen der Topologien $\mathscr{O}_n$. Analog zu (1) zeigt man dass das abzählbare System offener Mengen
$$\mathcal{G} := \bigcup_{N=1}^{\infty} \left\{ \bigtimes_{n=1}^{\infty} U_n \ : \ U_n \in \mathcal{G}_n, \ U_n = T_n \quad \forall\, n \geq N \right\}$$
eine Basis für die Topologie in T bildet.

□

4.2.3 Korollar: Produkte metrischer Räume

Es seien $(M_n, d_n), \ n \in \mathbb{N}$ metrische Räume dazu der Produktraum $M := \bigtimes_{n=1}^{\infty} M_n$ ausgestattet mit der Produkt-Topologie. Dann ist auch M metrisierbar und separabel falls es auch alle M_n sind.

Beweis: Die Abbildung
$$d((x_n),(y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} \quad , \quad (x_n),(y_n) \in M$$
erweist sich als, die Produkt-Topologie erzeugende, Metrik auf M[3]. Sind alle M_n separabel, so ist es nach 4.2.2 auch M.

□

4.3 Vervollständigung von Räumen

4.3.1 Lemma: Vervollständigung metrischer Räume

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann kann M isometrisch in einen vollständigen, metrischen Raum $\overline{M}$ eingebettet werden, in dem M dicht liegt. Man sagt, $\overline{M}$ sei *eine Vervollständigung* von M.

Jede weitere Vervollständigung von M in der M dicht liegt, ist isometrisch homeomorph zu $\overline{M}$. Daher macht es Sinn von *der Vervollständigung* $\overline{M}$ von M zu reden.

Beweis: Sei $\mathscr{C}(M)$ der Raum aller Cauchy-Folgen auf M, ausgestattet mit der Äquivalenzrelation
$$(\mathbf{a}) \sim (\mathbf{n}) \quad :\Leftrightarrow \quad d(a_n,b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \mathbf{a}=(a_n), \mathbf{b}=(b_n) \in \mathscr{C}$$
und $\mathscr{C}/\sim$ die Menge aller entstehenden Äquivalenzklassen $[\mathbf{a}]$ auf $\mathscr{C}$. Die auf $\mathscr{C}/\sim$ wie folgt
$$\widetilde{d}([\mathbf{a}],[\mathbf{b}]) := \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) \quad , \quad [\mathbf{a}],[\mathbf{b}] \in \mathscr{C}/\sim$$
definierte, nicht-negative Abbildung, ist wohldefiniert[12] und eine Metrik auf $\mathscr{C}/\sim$, denn:

- Definitheit: Aus $\widetilde{d}([\mathbf{a}],[\mathbf{b}]) = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = 0$ bzw. $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.
- Symmetrie ist klar.
- Dreiecksungleichung: Folgt aus Dreiecksungleichung von d.

[12] Da die Folge $d(a_n,b_n)$ in $\mathbb{R}$ Cauchy ist.

Behauptung: $\widetilde{d}$ macht $\mathscr{C}/\sim$ zu einem vollständigen metrischen Raum.

Beweis: Sei $[\mathbf{a}_m] \in \mathscr{C}/\sim$ Cauchy (bzgl. $\widetilde{d}$), das heißt $\lim\limits_{n,m\to\infty} \widetilde{d}([\mathbf{a}_n],[\mathbf{a}_m]) = 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle N_n so dass $d(a_{nk}, a_{nl}) \le \frac{1}{n} \;\; \forall\, k,l \ge N_n$ und setze $b_n := a_{nN_n}$. Dann gilt

$$d(a_{nk}, b_n) \le \frac{1}{n} \quad \forall\, k \ge N_n \tag{4.1}$$

bzw.

$$\lim_{k\to\infty} d(a_{nk}, b_n) \le \frac{1}{n} \tag{4.2}$$

Zu zeigen ist: $[\mathbf{a}_n] \overset{n\to\infty}{\underset{\widetilde{d}}{\longrightarrow}} [\mathbf{b}]$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und wähle $M \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{M} \le \varepsilon$ und

$$\widetilde{d}([\mathbf{a}_k],[\mathbf{a}_m]) \le \varepsilon \quad \forall\, k,m \ge M \tag{4.3}$$

Beachte dass dies stets möglich ist, da $[\mathbf{a}_n]$ Cauchy ist. Dann gilt für $m \ge M,\;\; k \ge \max\{M, N_m\}$:

$$d(b_k, a_{mk}) \le \underbrace{\lim_{l\to\infty} d(b_k, a_{kl})}_{\substack{\le 1/k \\ \text{nach (4.2)}}} + \underbrace{\lim_{l\to\infty} d(a_{kl}, a_{ml})}_{\substack{\le \varepsilon \\ \text{nach (4.3)}}} + \underbrace{\lim_{l\to\infty} d(a_{ml}, b_m)}_{\substack{\le 1/m \\ \text{nach (4.2)}}} + \underbrace{d(b_m, a_{mk})}_{\substack{\le 1/m \\ \text{nach (4.1)}}}$$

sprich

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} d(b_k, a_{mk})}_{\widetilde{d}([\mathbf{b}],[\mathbf{a}_m])} \le \varepsilon + \frac{2}{m} \le 3\varepsilon \quad \forall\, m \ge M$$

was zeigt $[\mathbf{a}_m] \overset{m\to\infty}{\underset{\widetilde{d}}{\longrightarrow}} [b]$. Daher ist $\mathscr{C}/\sim$ vollständig.

Zu Punkt $x \in M$ sei nun $\Phi(x) := [(x)]$ die Äquivalenzklasse der Cauchy Folge identisch x, sprich die Klasse der zu x konvergenten Folgen in (M,d). Dann ist $\Phi : M \to \mathscr{C}/\sim$ eine Isometrie zwischen M und $\mathscr{C}/\sim$, denn zu $x,y \in M$ ist

$$\widetilde{d}\left([(x)],[(y)]\right) = \lim_{k\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$$

Insbesondere ist Φ ein Homeomorphismus in sein Bild, sprich $M \hookrightarrow \mathscr{C}/\sim$.

Behauptung: $\Phi(M)$ liegt dicht in $\mathscr{C}/\sim$.

Beweis: Gegeben $[\mathbf{a}] \in \mathscr{C}/\sim$ und $\varepsilon > 0$, existiert aufgrund der Cauchy-Eigenschaft von $\mathbf{a}$ ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $d(a_n, a_m) \le \varepsilon \;\; \forall\, m \ge n$. Insbesondere

$$\widetilde{d}([\mathbf{a}], \underbrace{\Phi(a_n)}_{[(a_n)]}) = \lim_{m\to\infty} d(a_m, a_n) \le \varepsilon$$

was zu zeigen war.

Behauptung: Sind $(M',d'), (M'',d'')$ Vervollständigungen von (M,d) in denen M jeweils dicht liegt, so sind M', M'' isometrisch homeomorph.

Beweis: Man kann sich o.B.d.A. M als Teil von M' und M'' vorstellen, so dass $d = d'\big|_M = d''\big|_M$. Ist nun $x \in M'$, so existiert eine Folge $(x_n) \in M$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\underset{d'}{\longrightarrow}} x$. Da diese Cauchy in M ist, ist sie auch Cauchy in M'' und besitzt dort einen Grenzwert: $x_n \overset{n\to\infty}{\underset{d''}{\longrightarrow}} z \in M''$. Dieser Grenzwert ist tatsächlich nur von x abhängig, da für jede weitere $M \ni y_n \overset{n\to\infty}{\underset{d'}{\longrightarrow}} x$ gilt

$$\underbrace{d'(x_n, y_n)}_{d(x_n,y_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad d''(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sprich $y_n \overset{n\to\infty}{\underset{d''}{\longrightarrow}} z$.

Setzen $Q(x) := z$ und zeigen nun, dass $Q : M' \to M''$ eine Isometrie ist. Sind $x, y \in M'$ und $x_n, y_n \in M$ so dass

$$x_n \overset{n\to\infty}{\underset{d'}{\longrightarrow}} x \quad , \quad y_n \overset{n\to\infty}{\underset{d'}{\longrightarrow}} y$$

so gilt

$$d'(x,y) = \lim_{n\to\infty} d'(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d''(x_n, y_n) = d''(\Phi(x), \Phi(y))$$

Daher ist $Q : M' \to M''$ eine isometrische Einbettung. Offensichtlich ist Q auch surjektiv, also ein isometrischer Homeomorphismus.

□

4.3.2 Korollar: Kompaktifizierung präkompakter Räume

Sei (M, d) ein präkompakter, metrischer Raum. Dann kann er zu einem kompakten, metrischen Raum fortgesetzt werden, in dem er dicht ist.

Beweis: Nach (4.3.1) kann M isometrisch in einen vollständigen Raum eingebettet werden. Offensichtlich ist dort sein Abschluss $\mathrm{cl}(M)$ auch präkompakt und vollständig, also kompakt.
□

4.4 Funktionenräume auf topologischen Räumen

4.4.1 Lemma: Dichte trennende Unterräume von $\mathcal{C}_b$

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\Lambda \subseteq \mathcal{C}_b(T)$ ein $\mathbb{Q}$-linearer Unterraum von $\mathcal{C}_b(T)$ mit der *normalen Trennungseigenschaft*, das heißt für je zwei disjunkte, abgeschlossene A, B existiert $f \in \Lambda$ mit

$$0 \le f \le 1 \quad , \quad f\big|_A = 0 \quad , \quad f\big|_B = 1$$

Dann liegt Λ dicht in $\mathcal{C}_b$ (bzgl. der Supremumsnorm).

Beweis: Der Beweis erfolgt nach [5] in 3 Schritten.
Behauptung: Zu $a \le b \in \mathbb{Q}$ und disjunkten, abgeschlossenen $A, B \subseteq T$ existiert $g \in \Lambda$ so dass $a \le g \le b$ und $g\big|_A = a,\ g\big|_B = b$.

> **Beweis:** Wähle $f \in \Lambda$ so dass $0 \le f \le 1$ und $f\big|_A = 0,\ f\big|_B = 1$. Setze
>
> $$g := a + (b - a) \cdot f$$
>
> (beachte dass $1 \in \Lambda$).

Behauptung: Zu $\varkappa \in \mathcal{C}_b,\ \varepsilon > 0$ existiert ein $\lambda \in \Lambda$ so dass $\|\varkappa - \lambda\|_\infty \le \frac{2}{3} \cdot \|\varkappa\|_\infty + \varepsilon$.

> **Beweis:** Sei $\alpha := \inf \varkappa$ und $\beta := \sup \varkappa$, wähle
>
> $$a \in [\alpha - \varepsilon, \alpha) \cap \mathbb{Q} \quad , \quad b \in (\beta, \beta + \varepsilon] \cap \mathbb{Q}$$

und setze $\delta := (b-a) \leq 2\|\varkappa\|_\infty + 2\varepsilon$. Die Mengen

$$A := \left\{a \leq \varkappa \leq a + \tfrac{\delta}{3}\right\} \quad , \quad B := \left\{a + \tfrac{2\delta}{3} \leq \varkappa \leq b\right\}$$

sind disjunkt, abgeschlossen. Nach obiger Behauptung existiert daher ein $\lambda \in \Lambda$ so dass

$$a + \tfrac{\delta}{3} \leq \lambda \leq a + \tfrac{2\delta}{3} \quad , \quad \lambda\big|_A = a + \tfrac{\delta}{3} \quad , \quad \lambda\big|_B = b + \tfrac{2\delta}{3}$$

was impliziert $\|\varkappa - \lambda\|_\infty \leq \delta/3$, bzw.

$$\|\varkappa - \lambda\|_\infty \leq \tfrac{2}{3}\|\varkappa\|_\infty + \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

Behauptung: Zu $g \in \mathcal{C}_b$ gilt stets $d(g,\Lambda) \leq \frac{2}{3}d(g,\Lambda)$.

Beweis: Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig und $h \in \Lambda$ so dass $\|g-h\|_\infty \leq d(g,\Lambda) + \varepsilon$. Dann existiert $\lambda \in \Lambda$ so dass $\|(g-h) - \lambda\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|g-h\|_\infty + \varepsilon$, sprich

$$\|g - \underbrace{(h+\lambda)}_{=:f\in\Lambda}\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|g-h\|_\infty + \varepsilon \leq \frac{2}{3}d(g,\Lambda) + \frac{2\varepsilon}{3} + \varepsilon$$

bzw.

$$d(g,\Lambda) \leq \frac{2}{3}d(g,\Lambda) + 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$d(g,\Lambda) \leq \frac{2}{3}d(g,\Lambda)$$

Letztere Behauptung impliziert $d(g,\Lambda) = 0 \ \ \forall\, g \in \mathcal{C}_b$, was zu zeigen war.
□

4.4.2 Theorem: Separabilität von $\mathcal{C}_b$ für kompakte Hausdorff-Räume

Sei $(T,\mathscr{O})$ ein kompakter, Hausdorff-Raum[13]. Dann ist $\mathcal{C}_b(T)$ genau dann separabel, wenn T zweit-abzählbar ist.

Beweis:

Richtung "$\Leftarrow$": Der Beweis erfolgt unter Verwendung von 4.4.1, in 2 Schritten.

Behauptung: Es existiert ein abzählbares System $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{O} \times \mathscr{O}$ von Paaren offener Mengen, so dass $\mathrm{cl}(O) \subseteq G\ \forall\,(O,G) \in \mathscr{S}$ und für disjunkte, abgeschlossene $A,B \subseteq T$ stets ein Paar $(O,G) \in \mathscr{S}$ existiert mit $A \subseteq O,\ B \subseteq G^c$.

Beweis: Sei $\mathcal{G}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathscr{O}$. Seien $A,B \subseteq T$ abgeschlossen, dann existieren offene, disjunkte $O,Z \in \mathscr{O}$ mit $A \subseteq O,\ B \subseteq Z$. Doch O is als Vereinigung offener Mengen aus $\mathcal{G}$ darstellbar, die dementsprechend eine offene Überdeckungen der kompakten A bilden. Davon können endlich viele $O_1,..,O_n \in \mathcal{G}$ gewählt werden so dass

$$A \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=1}^n O_k}_{=:\widetilde{O}} \subseteq O \subseteq Z^c \subseteq B^c$$

[13] Beachte: Ein kompakter Hausdorff-Raum ist nach 4.1.8 normal und vollständig regulär.

wobei $\mathrm{cl}(\widetilde{O}) \subseteq Z^c$, sprich $\mathrm{cl}(\widetilde{O}) \cap B = \emptyset$. Nach dem gleichen Argument, existieren endlich viele $G_1, .., G_m \in \mathcal{G}$ so dass

$$\mathrm{cl}(\widetilde{O}) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} G_k}_{=:G} \subseteq B^c$$

So lassen sich für beliebige disjunkte, abgeschlossene $A, B \subseteq T$ offene $\widetilde{O}, G \in \mathscr{O}$ finden, so dass $\mathrm{cl}(\widetilde{O}) \subseteq G,\ A \subseteq \widetilde{O},\ B \subseteq G^c$ und $\widetilde{O}, G$ sind darstellbar als <u>endliche</u> Vereinigungen aus $\mathcal{G}$.
Daher erfüllt das abzählbare System

$$\mathscr{S} := \{(O, G) \in \mathscr{O} \times \mathscr{O} : \mathrm{cl}(O) \subseteq G,\ O, G \text{ endliche Vereinigungen aus } \mathcal{G}\}$$

die gesuchten Eigenschaften.

Behauptung: Es existiert ein abzählbares System $\Gamma \subseteq \mathcal{C}_b$, so dass für beliebige disjunkte, abgeschlossene $A, B \subseteq T$ ein $f \in \Gamma$ existiert mit $0 \leq f \leq 1$ und $f\big|_A = 0,\ f\big|_B = 1$.

Beweis: Sei $\mathscr{S} = \{(O_i, G_i)\}_{i=1}^{\infty}$ das System aus der ersten Behauptung. Zu $(O_i, G_i) \in \mathscr{S}$ wähle $f_i \in \mathcal{C}_b$ so dass

$$0 \leq f_i \leq 1 \quad , \quad f_i\big|_{\mathrm{cl}(O_i)} = 0 \quad , \quad f_i\big|_{G_i^c} = 1$$

(beachte Normalität von T). Dann erfüllt das abzählbare System $\Gamma := \{f_i : (O_i, G_i) \in \mathscr{S}\}$ die gewünschten Eigenschaften.

Da Γ abzählbar ist, ist auch sein $\mathbb{Q}$-Span $\Lambda := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$, das heißt die Menge aller endlichen $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen aus Γ, abzählbar. Da Λ die Trennungseigenschaft von 4.4.1 erfüllt, ist $\Lambda \subseteq \mathcal{C}_b$ dicht.

Richtung "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_b$ dicht in $\mathcal{C}_b$. Dann bildet das abzählbare System

$$\mathcal{G} := \left\{g^{-1}((q, p)) : g \in \mathcal{F},\ q, p \in \mathbb{Q}\right\}$$

eine Basis der Topologie in T.

Beweis: Ist $U \in \mathscr{O}$ eine offene Umgebung von $x \in T$, so existiert ein $f \in \mathcal{C}_b$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f(x) = 1,\ f\big|_{U^c} = 0$ (beachte dass T vollständig regulär ist). Wähle nun $g \in \mathcal{F}$ so dass $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ und setze $G := g^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) \in \mathcal{G}$. Dann ist $x \in G \subseteq U$.

□

4.4.3 Lemma: Fortsetzung gleichmäßig stetiger Funktionen

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine dichte Teilmenge. Dann besitzt jede $f \in \mathcal{U}_b(A)$ eine eindeutige, stetige Fortsetzung $\overline{f}$ auf M. Dabei ist $\overline{f}$ sogar gleichmäßig stetig und die Zuordnung $f \mapsto \overline{f},\ \mathcal{U}_b(A) \to \mathcal{U}_b(M)$ ist linear, normerhaltend, bijektiv.

Beweis: Zu $x \in M$ und $x_n \in A$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ setze

$$\overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \tag{4.4}$$

Tatsächlich ist $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ wohldefiniert:

- Da gleichmäßig stetige Funktionen Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbilden, existiert der Grenzwert (4.4) stets.

- Sei zusätzlich $A \ni y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ so dass $f\left(B_{\delta_\varepsilon}(z) \cap A\right) \subseteq B_\varepsilon(f(z))\ \ \forall\, z \in A$. Für genügend große $n \in \mathbb{N}$, für die $y_n \in B_{\delta_\varepsilon}(x_n)$, folgt auch

  $$f(y_n) \in B_\varepsilon(x_n)$$

  Daher gehen auch $|f(x_n) - f(y_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und (4.4) ist wohldefiniert.

Offensichtlich ist $\overline{f}(M) \subseteq \mathrm{cl}(f(A))$, das heißt $\left\|\overline{f}\right\|_\infty = \|f\|_\infty$. Außerdem ist $\overline{f}$ gleichmäßig stetig:

> **Beweis:** Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so dass
>
> $$f\left(B_{3\delta}(z) \cap A\right) \subseteq B_{\varepsilon/3}(f(z))\ \ \forall\, z \in A \tag{4.5}$$
>
> Sind nun $z \in M,\ x \in B_\delta(z)$ und $x_n, z_n \in A$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, so gilt für genügend große $n \in \mathbb{N}$
>
> $$x_n \in B_\delta(x) \quad , \quad z_n \in B_\delta(z)$$
>
> bzw. $x_n \in B_{3\delta}(z_n)$, daher nach (4.5)
>
> $$f(x_n) \in B_{\varepsilon/3}(f(z_n))$$
>
> Da auch $f(x_n) \in B_{\varepsilon/3}(\overline{f}(x))$ und $f(z_n) \in B_{\varepsilon/3}(\overline{f}(z))$ für genügend große $n \in \mathbb{N}$, folgt
>
> $$\overline{f}(x) \in B_\varepsilon(\overline{f}(z))$$
>
> was zu zeigen war.

Die Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung ist naheliegend. Für jede $g \in \mathcal{U}_b(M)$ ist $g\big|_A \in \mathcal{U}_b(A)$, was die Surjektivität der Zuordnung $f \mapsto \overline{f}$ impliziert. $\square$

4.5 Äußere Maße

4.5.1 Definition: Äußeres Maß

Sei Ω beliebige Menge. Eine Mengenfunktion $\varphi : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ heißt *äußeres Maß*, falls:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$
2. **Monotonie:** Aus $A \subseteq B \subseteq \Omega$ folgt $\varphi(A) \leq \varphi(B)$
3. **σ-Subadditivität:** Zu Mengenfolge $A_n \subseteq \Omega$ gilt

   $$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

4.5.2 Satz: Induzierung äußerer Maße

Sei μ ein Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{S})$. Dann ist die Abbildung $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,\infty]$, definiert durch

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{F \in \mathfrak{S} \\ A \subseteq F}} \mu(F)$$

ein äußeres Maß auf Ω und heißt das von μ *induzierte äußere Maß*.[8]

Beachte: $\mu^*\big|_{\mathfrak{S}} = \mu$.

4.5.3 Satz: Einschränkung von Maßen auf Unterräumen

Es sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $S \subseteq \Omega$ (nicht unbedingt messbar). Auf S sei betrachtet die Schnitt-σ-Algebra $\mathcal{S} := \mathfrak{S} \cap S$. Dann definiert

$$\nu(A) := \mu^*(A) \quad , \quad A \in \mathcal{S}$$

ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$. Falls $\mu^*(S) = \mu(\Omega) < \infty$, so gilt die Darstellung

$$\mu(B) = \nu(B \cap S) \quad , \quad B \in \mathfrak{S} \tag{4.6}$$

Beweis:

Beweis der Maß-Eigenschaften: Nach 4.5.2 genügt es die σ-Superadditivität von ν zu zeigen. Seien $A_1, A_2, .. \in \mathcal{S}$ disjunkt, dazu $\overline{A}_n \in \mathfrak{S}$ mit $A_n = \overline{A}_n \cap S$. O.B.d.A. kann angenommen werden dass die $\overline{A}_n$ ebenfalls disjunkt sind[14]. Zu zeigen wäre

$$\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

bzw. dass für $A \in \mathfrak{S}$ mit $A \supseteq \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt:

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{4.7}$$

O.B.d.A. können wir annehmen[15] dass $\overline{A}_n \subseteq A \ \forall \ n$, so dass sich schreiben lässt

$$\mu(A) \geq \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\overline{A}_n) \overset{\overline{A}_n \supseteq A_n}{\geq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

was genau zu zeigen war.

Beweis der Identität (4.6): Es sei $\mu^*(S) = \mu(\Omega)$, das heißt

$$\mu(U) = \mu(\Omega) \quad \forall \ S \subseteq U \in \mathfrak{S} \tag{4.8}$$

bzw. (da $\mu(\Omega) < \infty$):

$$\mu(U \cap B) = \mu(B) \quad \forall \ S \subseteq U \in \mathfrak{S}, \ B \in \mathfrak{S} \tag{4.9}$$

Ist nun $B \in \mathfrak{S}$ und $(B \cap S) \subseteq V \in \mathfrak{S}$, so gilt auch

$$S \subseteq (V \cup B^c) \in \mathfrak{S}$$

und daher

$$\mu(V) \geq \mu(V \cap B) = \mu\left((V \cup B^c) \cap B\right) \overset{(4.9)}{=} \mu(B) \qquad \forall \ (B \cap S) \subseteq V \in \mathfrak{S} \tag{4.10}$$

bzw.

$$\mu^*(B \cap S) = \inf_{\substack{V \in \mathfrak{S} \\ (B \cap S) \subseteq V}} \mu(V) \overset{(4.10)}{\geq} \mu(B)$$

[14] Andernfalls würden $\overline{B}_n := \overline{A}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \overline{A}_n \ \in \mathfrak{S}$ die gleichen Voraussetzungen erfüllen und disjunkt sein.
[15] Andernfalls würden $\overline{B}_n := \overline{A}_n \cap A \ \in \mathfrak{S}$ die Voraussetzungen erfüllen.

Natürlich gilt auch $\mu^*(B \cap S) \leq \mu(B)$ und daher

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap S) = \nu(B \cap S)$$

was zu zeigen war.
□

4.5.4 Lemma: Maß-Approximation durch $\mathcal{C}_b$

Sei $(T, \mathscr{O})$ ein perfekt-normaler, topologischer Raum und $\mu \in \mathscr{M}(T)$. Dann gilt für jede abgeschlossene $A \subseteq T$:

$$\mu(A) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{C}_b \\ 1_A \leq f}} \int f \, d\mu$$

Beweis: Da T perfekt-normal ist, ist A nach 4.1.3(3) eine G_δ-Menge, sprich

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

für irgendwelche offenen $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$. Wähle $f_n \in \mathcal{C}_b(T)$ so dass

$$0 \leq f_n \leq 1 \quad , \quad f_n\big|_A = 1 \quad , \quad f_n\big|_{G_n^c} = 0$$

Dann gilt

$$1_A \leq f_n \leq 1_{G_n}$$

und daher

$$\inf_n \int f_n \, d\mu \leq \inf_n \mu(G_n) \overset{G_n \searrow A}{=} \mu(A)$$

sprich

$$\inf_{\substack{f \in \mathcal{C}_b \\ 1_A \leq f}} \int f \, d\mu \leq \mu(A)$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.
□

4.5.5 Lemma: Maß-Approximation durch $\mathcal{U}_b$

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $\mu \in \mathscr{M}$ und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann gilt:

$$\mu(A) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{U}_b(M) \\ 1_A \leq f}} \int f \, d\mu$$

Beweis: A besitzt die Darstellung

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ d(A, \cdot) < \tfrac{1}{n} \right\}}_{=:G_n}$$

wobei die G_n offen sind mit $d(A, G_n^c) \geq 1/n$. Wähle $f_n \in \mathcal{U}_b(M)$ so dass

$$0 \leq f \leq 1 \quad , \quad f\big|_A = 1 \quad , \quad f\big|_{G_n^c} = 0$$

(vgl. 4.1.6). Dann gilt

$$1_A \leq f_n \leq 1_{G_n}$$

und daher

$$\inf_n \int f_n \, d\mu \leq \inf_n \mu(G_n) \overset{G_n \searrow A}{=} \mu(A)$$

das heißt

$$\inf_{\substack{f \in \mathcal{U}_b(M) \\ 1_A \leq f}} \int f \, d\mu \leq \mu(A)$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.
□

4.6 Hilfsaussagen

4.6.1 Lemma über gleichmäßig stetige Abbildungen

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f, g : M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig mit $\delta \leq |g|$ für irgendein $\delta > 0$. Ist (f/g) beschränkt, so ist (f/g) gleichmäßig stetig.

Beweis: Es sei $|f/g| \leq M$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so dass

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_{\widetilde{\varepsilon}}(f(x)) \quad , \quad g(B_\delta(x)) \subseteq B_{\widetilde{\varepsilon}}(g(x)) \quad \forall \, x \in M \tag{4.11}$$

wobei

$$\widetilde{\varepsilon} := \min\{1, 1/M\} \cdot \varepsilon\delta$$

Ist nun $y \in B_\delta(x)$ und $\eta := f(y) - f(x)$, $\zeta := g(y) - g(x)$, so folgt

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(y)} + \frac{\eta}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| + \underbrace{\left|\frac{\eta}{g(y)}\right|}_{\leq |\eta|/\delta} \leq |f(x)| \cdot \left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| + \frac{|\eta|}{\delta}$$

$$= \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{\zeta}{g(x)}\right|}_{\leq |\zeta|/\delta} + \frac{|\eta|}{\delta} \overset{(4.11)}{\leq} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \cdot \frac{\varepsilon\delta}{M} + \frac{\varepsilon\delta}{\delta} \leq 2\varepsilon$$

□

4.6.2 Lemma: Trennung durch messbare Mengen

Sei $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $A_n, B_n \subseteq \Omega$ so dass $A_n \cap B_m = \emptyset \;\; \forall \, n, m \in \mathbb{N}$. Sind A_n, B_m trennbar durch messbare Mengen $\forall \, n, m \in \mathbb{N}$, so sind auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad , \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

trennbar durch messbare Mengen.

Beweis: Zu je $n, m \in \mathbb{N}$ seien $E_{nm}, F_{nm} \in \mathfrak{S}$ disjunkt so dass $A_n \subseteq E_{nm},\ B_m \subseteq F_{nm}$. Setze

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{nm} \quad , \quad F := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{nm}$$

Dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E \quad , \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \subseteq F$$

Ferner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{nm} \quad \Rightarrow \quad x \notin F_{nm}\ \forall\ m \quad \Rightarrow \quad x \notin F$$

das heißt

$$\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{nm} \right) \cap F = \emptyset \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

bzw. $E \cap F = \emptyset$.
□

Literatur

[1] *Additive set-functions in abstract spaces 1*, A.D. Alexandroff
Recueil Mathématique, T8 (50), N. 2, 1940

[2] *Additive set-functions in abstract spaces 2*, A.D. Alexandroff
Recueil Mathématique, T9 (51), N. 3, 1941

[3] *Linear Operators - General Theory*, N. Dunford, J. T. Schwartz
Wiley-Interscience, 1988

[4] *Probability measures on metric spaces*, K.R. Parthasarathy
Academic Press, 1967

[5] *General Topology*, J.L.Kelley
Birkhäuser, 1975

[6] *General Topology*, R. Engelking
Heldermann, 1989

[7] *Vorlesung zur Spektraltheorie*, R. Oloff
FSU Jena, 2008
http://www.personal.uni-jena.de/~p6lost2/LibList/libraries/LIB_fsu_jena/MODULE_Spektraltheorie/

[8] *Measure theory*, P.R. Halmos
Springer, 1974